

Praktische Untersuchung eines Subspace Identifikationsverfahrens

Mathias Marquardt, Hochschule Wismar
mathias.marquardt@hs-wismar.de
Peter Dünow, Hochschule Wismar

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Nutzung von Subspace Statespace Methoden bei der Identifikation von diskreten Zustandsraummodellen für die Verwendung in Zustandsreglerstrukturen untersucht. Zu diesem Zweck wird ein der Literatur entnommenes Subspace Verfahren vorgestellt. Die so gewonnenen Systeminformationen dienen dem Entwurf eines Zustandsreglers, mit anschließender Validierung an einem realen Prozess.

1 Einleitung

Dem Entwurf einer Regelung geht eine mathematische oder physikalische Modellierung des Prozesses voraus. Moderne zustandsbasierte Regelungsverfahren benötigen eine Beschreibung des Systems in Zustandsraumdarstellung, deren Bestimmung mit klassischen Identifikationsmethoden aufgrund der hohen Anzahl zu schätzender Parameter sehr aufwendig bzw. nur in Normalformen mit reduzierter Parameteranzahl möglich ist. Abhilfe bietet die Klasse von Subspace basierten Identifikationsverfahren, welche aus Ein-/Ausgangsdaten vollständige Zustandsraummodelle schätzen. Weitere Vorteile gegenüber klassischen Verfahren sind die nicht iterative Berechnung der Lösung, was das Problem der nicht garantierten Konvergenz ausschließt und die nicht nötige initiale Parametrierung. Des Weiteren können die Methoden ohne Anpassung der Algorithmen auf Mehrgrößensysteme angewandt werden [1, 3].

In diesem Beitrag soll untersucht werden, ob sich die von einem Subspace Verfahren identifizierten Modelle für den Einsatz in einer Zustandsregelung mit Beobachter zur Regelung der Strömungsgeschwindigkeit in einem Versuchsaufbau eignen.

2 Subspace Identifikation

Dieser Abschnitt gibt einen Einblick in die Grundlagen des verwendeten Subspace Statespace Identifikationsalgorithmus. Abbildung 1 zeigt das prinzipielle Vorgehen bei der Subspace Identifikation im Vergleich zu klassischen Methoden.

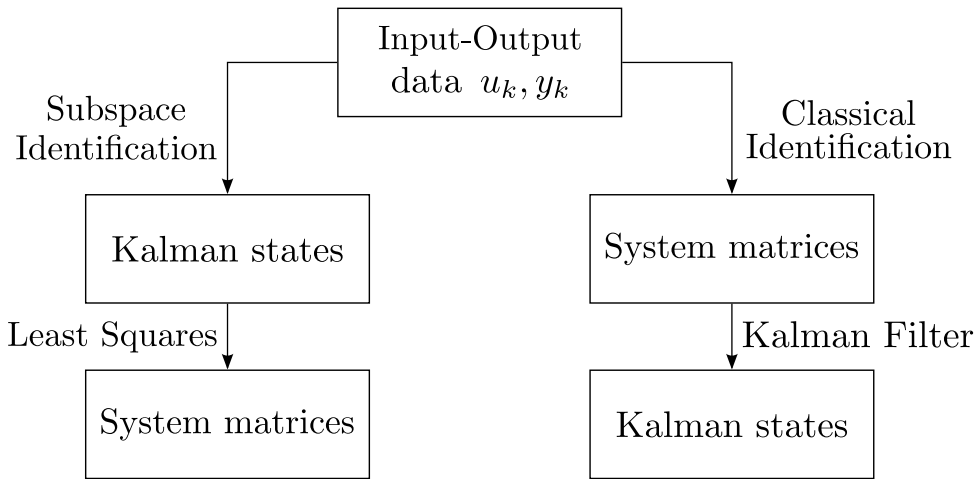


Abbildung 1: Prinzipieller Ablauf der Systemidentifikation bei Subspace Methoden (links) sowie bei klassischer Systemidentifikation (rechts), [3]

2.1 Systembeschreibung

Mit Hilfe des hier beschriebenen Identifikationsverfahrens werden diskrete Zustandsraummodelle identifiziert, die wie folgt definiert sind.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \quad (2)$$

mit

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{pq}^1 \quad (3)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Systemmatrix, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Eingangsmatrix, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ die Ausgangsmatrix und $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ die Durchgriffsmatrix des linearen zeitinvarianten Systems darstellt. Die Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ und $y_k \in \mathbb{R}^l$ enthalten die Zustände, die Eingangsgrößen und die Ausgangsgrößen des Systems. Vektor $w_k \in \mathbb{R}^n$ und $v_k \in \mathbb{R}^l$ beschreiben nicht messbare, gaußverteilte, mittelwertfreie, weiße Rauschsequenzen. Die Kovarianzen dieser Rauschsignale werden in den Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$ und $S \in \mathbb{R}^{n \times l}$ beschrieben. Des Weiteren wird $\{A, C\}$ als beobachtbar und $\{A, (B \ Q^{1/2})\}$ als steuerbar angenommen.

2.2 Identifikation

Die folgenden vier Theoreme wurden [1] und [2] entnommen. Sie zeigen den Zusammenhang zwischen den gemessenen Ein- und Ausgangswerten und der Ordnung des Systems, welche Bedingungen für die Identifikation erfüllt sein müssen und wie sich mit Hilfe von Singulärwertzerlegungen und der Least-Squares Methode ein Zustandsraummodell aus den Messwerten berechnen lässt.

¹Kronecker Delta

Theorem 1 Zeitfolgen der Messwerte sowie der Zustände, die die Zustandsraumgleichungen (1) und (2) erfüllen, erfüllen ebenfalls die Matrix Ein-/Ausgangsgleichungen:

$$Y_{0|i-1} = \Gamma_i X_0 + H_i U_{0|i-1} + Y_{0|i-1}^s \quad (4)$$

$$Y_{i|2i-1} = \Gamma_i X_i + H_i U_{i|2i-1} + Y_{i|2i-1}^s \quad (5)$$

Die Matrizen der Ein- und Ausgangssignalfolgen werden in eine Block-Hankel Struktur gebracht, wobei der Index die erste und letzte Blockzeile angibt. Die gemessenen Signale werden zudem in „vergangene“ ($0|i-1$) und „zukünftige“ ($i|2i-1$) Zeitreihen aufgeteilt. Die Anzahl der Blockzeilen i ist ein vom Nutzer frei wählbarer Parameter und sollte größer als die Ordnung des zu identifizierenden Systems sein ($i > n$).

$$U_{0|i-1} = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+j-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \cdots & u_{k+j} \\ u_{k+2} & u_{k+3} & \cdots & u_{k+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \cdots & u_{k+i+j-2} \end{bmatrix} \quad Y_{0|i-1} = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+j-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+j} \\ y_{k+2} & y_{k+3} & \cdots & y_{k+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+i-1} & y_{k+i} & \cdots & y_{k+i+j-2} \end{bmatrix}$$

Die Matrix Y^s wird auf die selbe Weise aus den Ausgangswerten des stochastischen Teilsystems gebildet. Γ_i ist eine erweiterte ($i > n$) Beobachtbarkeitsmatrix und H_i ist eine untere Dreiecks-Block-Toeplitzmatrix, die wie folgt gebildet wird.

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

Theorem 2 Die Matrizen $Y_{0|i-1}$, X_0 und $U_{0|i-1}$ sind wie in Theorem 1 definiert und die Matrix W_p wird aus den vergangenen Messwerten $Y_{0|i-1}$ und $U_{0|i-1}$ zusammengesetzt

$$W_p = \begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ U_{0|i-1} \end{bmatrix}$$

dann ist unter den Bedingungen:

1. $\text{rang}(X) = n$, d.h. alle Moden werden hinreichend angeregt, wobei n die minimale Systemordnung ist
2. $\text{span}_{\text{row}}(X) \cap \text{span}_{\text{row}}(U_{0|i-1}) = 0$

die folgende Rangeigenschaft für den rein deterministischen Fall ($w_k = 0, v_k = 0$) gegeben:

$$\text{rang}(W_p) = \text{rang}(U_{0|i-1}) + n$$

Daraus ergibt sich, dass der Zeilenraum von $Y_{0|i-1}$ n Dimensionen zum Zeilenraum von $U_{0|i-1}$ hinzufügt, woraus sich im Vorfeld der eigentlichen Systemidentifikation die Ordnung des Systems bestimmen lässt. Im kombiniert deterministisch-stochastischen Fall kann eine Schätzung der Systemordnung durch Analyse der Singulärwerte von W_p erfolgen, da die Rangeigenschaft aufgrund der verrauschten Messwerte nicht mehr gegeben ist (W_p besitzt vollen Rang).

Theorem 3 Um die Zustandsvektorfolge als Schnitt der Zeilenräume zweier Block-Hankel-Matrizen aus Ein- und Ausgangswerten zu berechnen, werden die Matrizen W_p und W_f aus den vergangenen sowie zukünftigen Messwerten aufgestellt.

$$W_p = \begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ U_{0|i-1} \end{bmatrix} \quad W_f = \begin{bmatrix} Y_{i|2i-1} \\ U_{i|2i-1} \end{bmatrix}$$

Wenn die Zustandsfolge X_i wie folgt definiert ist,

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{k+i} & x_{k+i+1} & \cdots & x_{k+i+j-1} \end{bmatrix}$$

dann gilt

$$\text{span}_{\text{row}}(X_i) = \text{span}_{\text{row}}(W_p) \cap \text{span}_{\text{row}}(W_f)$$

sodass jede Basis des Schnitts eine gültige Zustandsvektorfolge darstellt, wobei die Wahl unterschiedlicher Basen in einer Ähnlichkeitstransformation des identifizierten Modells resultiert. In der Praxis schneiden sich die Zeilenräume von W_p und W_f aufgrund von Störungen auf den Messsignalen nicht. In [2] wird aus diesem Grund eine Näherung des Schnitts mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung von $W = \begin{bmatrix} W_p \\ W_f \end{bmatrix}$ durchgeführt.

Theorem 4 Die Singulärwertzerlegung von W ist:

$$W = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

mit

$$U_{11} \in \mathbb{R}^{(mi+li) \times (2mi+n)}$$

$$U_{12} \in \mathbb{R}^{(mi+li) \times (2li-n)}$$

$$U_{21} \in \mathbb{R}^{(mi+li) \times (2mi+n)}$$

$$U_{22} \in \mathbb{R}^{(mi+li) \times (2li-n)}$$

$$S_{11} \in \mathbb{R}^{(2mi+n) \times (2mi+n)}$$

Die Zustandsfolge X_i kann nun wie folgt berechnet werden.

$$X_i = U_q^T U_{12}^T W_p \tag{6}$$

wobei $U_q \in \mathbb{R}^{(2li-n) \times n}$ für die notwendige Reduzierung der $2li - n$ linear abhängigen Zeilenvektoren von $U_{12}W_p$ auf n linear unabhängige Zeilen sorgt. U_q ist wie folgt definiert:

$$U_{12}^T U_{11} S_{11} = \begin{bmatrix} U_q & U_q^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_q^T \\ V_q^{\perp T} \end{bmatrix}$$

Wurde die Zustandsvektorfolge nach Gleichung (6) bestimmt, können die Systemmatrizen durch das Lösen eines überbestimmten Gleichungssystems (7) mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden.

$$\begin{bmatrix} x_{k+i+1} & \cdots & x_{k+i+j-1} \\ y_{k+i} & \cdots & y_{k+i+j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{k+i} & \cdots & x_{k+i+j-2} \\ u_{k+i} & \cdots & u_{k+i+j-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \quad (7)$$

Aus den Residuen ρ_w und ρ_v der Lösung können die Kovarianzen zu den Rauschtermen w_k und v_k geschätzt werden [1].

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \cong \mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_w^T & \rho_v^T \end{pmatrix} \right]$$

3 Reglerstruktur

Mit Hilfe eines nach Abschnitt 2 identifizierten Zustandsraummodells, soll ein Zustandsregler mit I-Erweiterung und Vorfilter entworfen werden. Da das identifizierte Modell zwar im Ein-/Ausgangsverhalten mit der Regelstrecke übereinstimmt, nicht aber im Systemzustand, muss der Regler zusätzlich um einen Beobachter erweitert werden. Die vollständige Reglerstruktur ist in Abbildung 2 dargestellt.

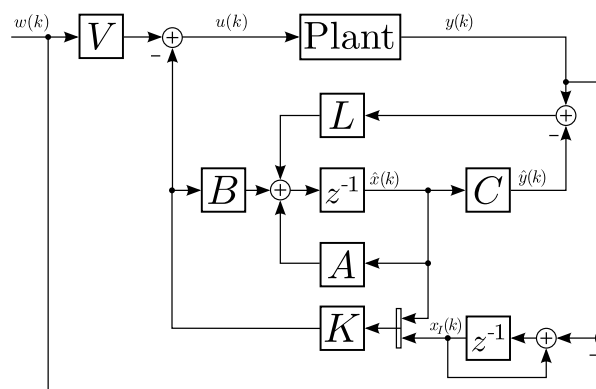


Abbildung 2: Struktur des Zustandsreglers mit I-Erweiterung und Vorfilter

Die Parametrierung des Beobachtungsvektors L erfolgte auf Basis eines Optimalbeobachterentwurfs mit Hilfe der Matlabfunktion $L = \text{dlqe}(A, C, Q, R)$, wobei die Matrizen A, C, Q und R von dem Subspace Verfahren berechnet wurden. Die Zustandsrückführung K wurde als Optimalregler ausgelegt und mit der Matlabfunktion $K = \text{dlqr}(A_I, B_I, Q, R)$ bestimmt. Die Matrizen A_I und B_I sind die um den Zustand des Integrators erweiterten Systemmatrizen.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix}}_{A_I} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_I} u(k)$$

Das Vorfilter V wurde zur Kompensation des statischen Fehlers bei Zustandsrückführung ohne I-Anteil ausgelegt.

$$V = \frac{1}{C[I - (A - BK_{1:n})]^{-1} B}$$

4 Versuchsaufbau

Für den Funktionsnachweis des Reglerentwurfs auf Basis des identifizierten Systemmodells wurde ein Versuchsaufbau mit einem Strömungskanal realisiert. Der Aufbau besteht aus einem Lüfter, einem ein Meter langen Strömungsrohr und einem Sensor zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit. Die Stellgröße dieses Eingrößensystems ist die Eingangsspannung des Lüfters und die Regelgröße ist die Ausgangsspannung des Strömungssensors, als Maß für die Strömungsgeschwindigkeit an der Messstelle.

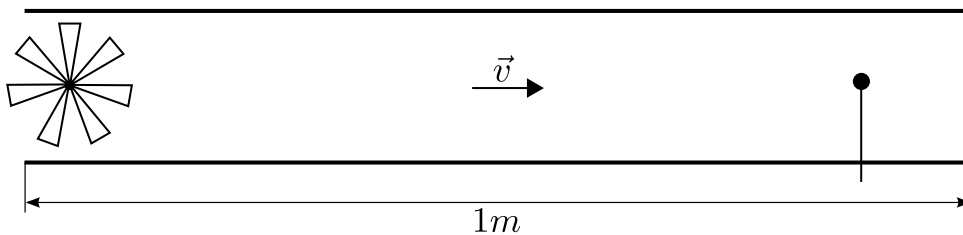


Abbildung 3: schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

5 Ergebnisse

Für den Funktionsnachweis der Systemidentifikation und des darauf aufbauenden Reglerentwurfs wurden einige Messungen an dem Versuchsaufbau durchgeführt.

Bei der Identifikationsmessung wurde das System von einer pseudozufälligen Binärsequenz (PRBS) mit einer Periodenlänge von $M = 511$ Samples angeregt, was nach [4] eine Anregung der Ordnung $M - 1$ im System hervorruft. Zudem wurden die Messungen zur Identifikation mit unterschiedlichen Abtastzeiten durchgeführt. Die Ordnung des zu identifizierenden Modells wird durch die Analyse der Singulärwerte der Datenmatrix W_p bestimmt (siehe Theorem 2). Abbildung 4 zeigt die Singulärwerte von

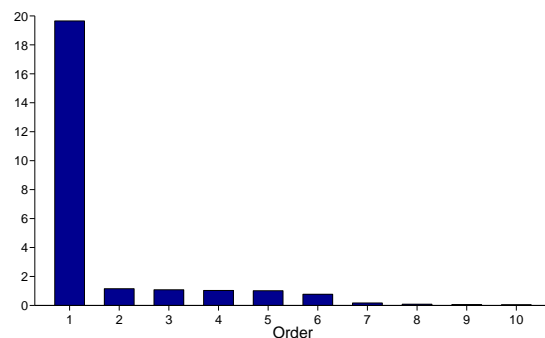


Abbildung 4: Singulärwerte der Datenmatrix W_p

W_p bei einer zuvor festgelegten Blockspaltenanzahl von $i = 10$. Wie zu erkennen ist, gibt es nur einen dominanten Singulärwert, was auf ein System erster Ordnung hindeutet.

Um die Güte des Modells zu untersuchen, wurde die Systemantwort auf sprungförmige Änderungen der Lüfterspannung aufgezeichnet und mit der Modellantwort auf die selben Signale verglichen, siehe Abbildung 5. Die Eingangsspannung des Lüfters wurde dabei zwischen fünf und sieben Volt bei einer Pulsbreite von 20 Sekunden umgeschaltet. In den Abbildungen 5a - 5d sind die Vergleichsmessungen mit unterschiedlichen Abtastzeiten für ein Modell 1. Ordnung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass bei einer Abtastzeit von 0.1 Sekunden (Abb. 5a) eine signifikante Abweichung zwischen dem Modell und dem realen System herrscht, wohingegen die Modelle, die für größere Abtastzeiten identifiziert wurden, eine genauere Näherung des Prozesses ermöglichen.

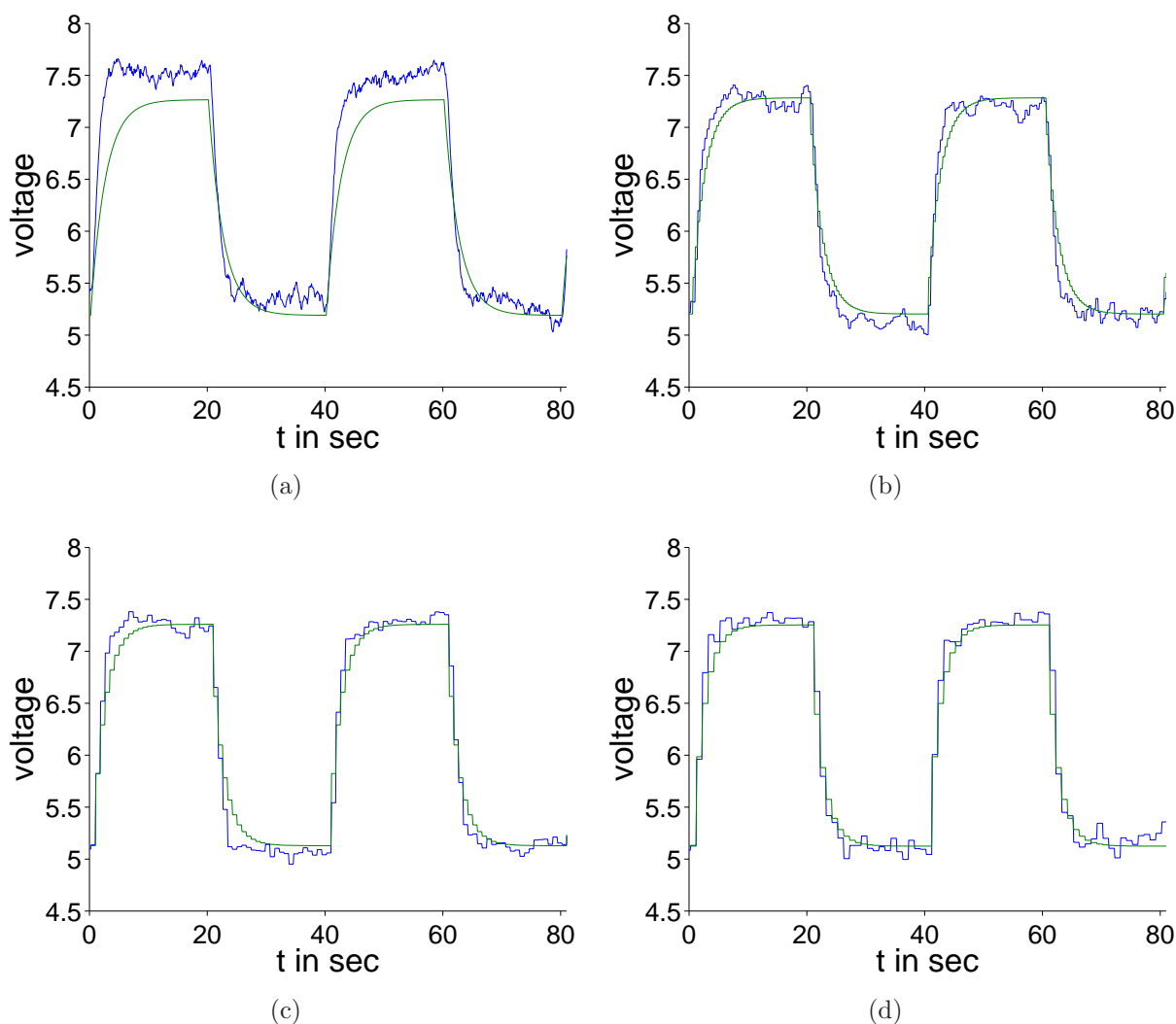


Abbildung 5: Vergleich der Sprungantworten des Systems (blau) und des identifizierten Modells 1. Ordnung (grün), bei unterschiedlichen Abtastzeiten (0.1s, 0.4s, 0.8s, 1s)

Falls wie in Abbildung 5a das Modell nicht die gewünschte Güte erreicht, bzw. Vorabinformationen über die Ordnung des Systems bekannt sind, kann dem Identifikationsverfahren eine Ordnung für das zu identifizierende Modell vorgegeben werden. Abbildung 6 zeigt die Sprungantworten des Versuchsaufbaus im Vergleich zu einem Modell der Ordnung $n = 2$.

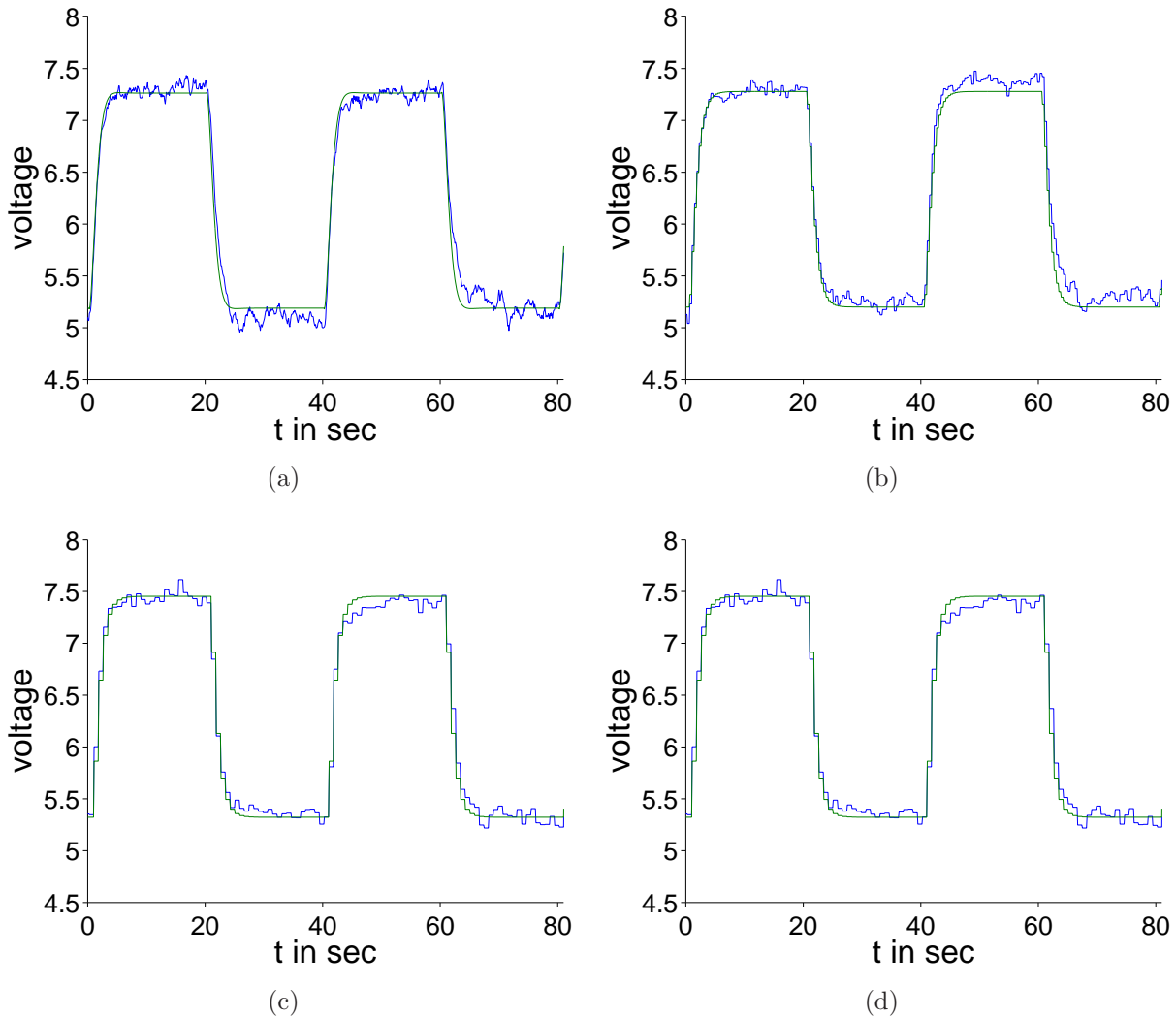


Abbildung 6: Vergleich der Sprungantworten des Systems (blau) und des identifizierten Modells 2. Ordnung (grün), bei unterschiedlichen Abtastzeiten (0.1s, 0.4s, 0.8s, 1s)

Nachdem die Modelle für die unterschiedlichen Abtastzeiten und Systemordnungen identifiziert wurden, erfolgte mit deren Hilfe der Entwurf der Zustands- und Beobachterrückführung sowie des Vorfilters, nach den in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren. Die Zustandsrückführungen aller Regler wurden mit den selben Wichtungsmatrizen $Q = I_n$ und $R = 10$ entworfen. In den Abbildungen 7 und 8 sind die Ergebnisse der Regelung für Modelle erster sowie zweiter Ordnung dargestellt. Eine Abtastzeit von 0.1 Sekunden sorgt dafür, dass die Eigenwerte des identifizierten Modells sehr dicht am Einheitskreis liegen. Im Zusammenspiel mit einer großen Modellabweichung (Abb. 5a) führt dies zu instabilem Verhalten, welches in Abbildung 7 links oben dargestellt ist. Bei den restlichen Versuchen zeigte sich stabiles Verhalten, wobei der Fokus der Regelung darauf lag zu zeigen, dass sich durch Subspace Verfahren identifizierte Modelle für die Verwendung in Zustandsreglerstrukturen eignen. Die erkennbaren Unterschiede in der Regelgüte in den beiden Arbeitspunkten resultieren aus Modellfehlern durch Nichtlinearitäten des Prozesses.

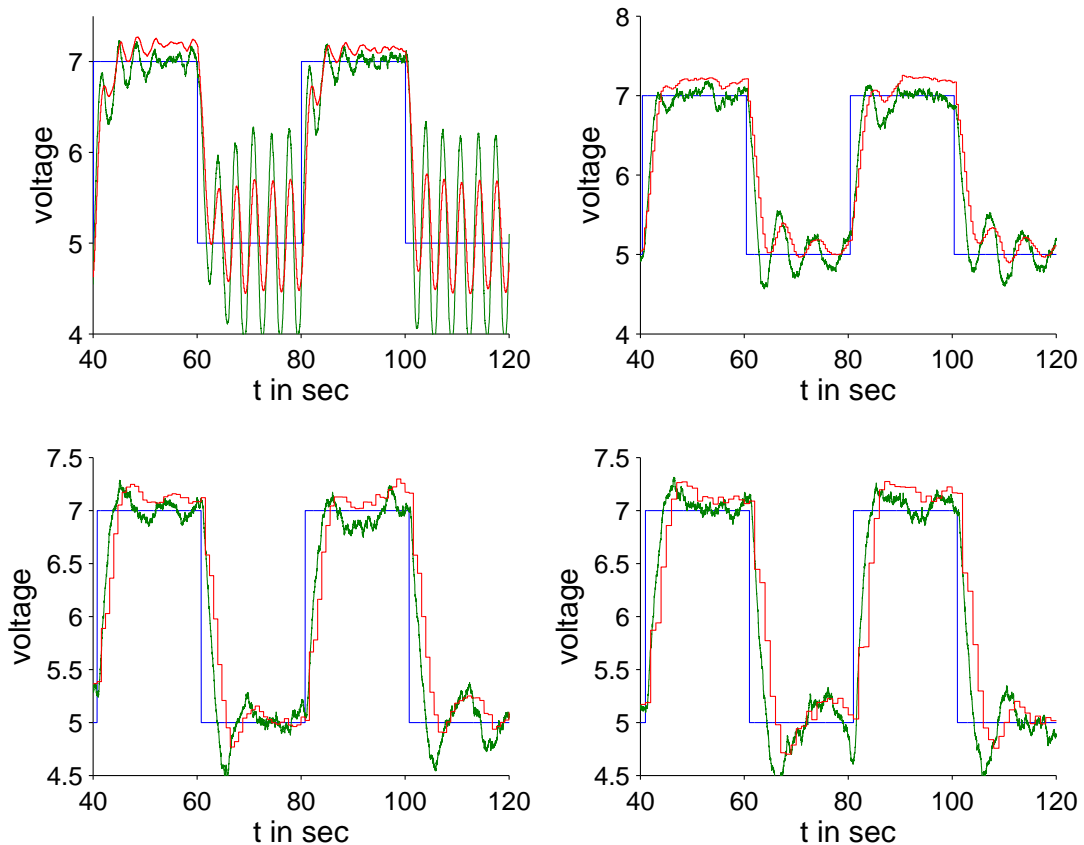


Abbildung 7: Ergebnisse der Regelung mit einem Modell 1. Ordnung und unterschiedlichen Abtastzeiten (0.1s, 0.4s, 0.8s, 1s); Sollwert (blau), Regelgröße (grün), Beobachteraussgang (rot)

6 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde gezeigt, dass sich Subspace Methoden prinzipiell zur Identifikation von Zustandsraummodellen für den Einsatz in Zustandsregelungen eignen. Das verwendete Verfahren nutzt lediglich Ein-/Ausgangsdaten, um mit Hilfe von zwei Singulärwertzerlegungen eine Zustandsfolge zu schätzen, aus der sich anschließend mittels Least-Squares Methode ein vollständiges Zustandsraummodell berechnen lässt. Dieses Zustandsraummodell wird für den Entwurf einer Zustandsrückführung sowie in einer Beobachterstruktur angewandt, um einen realen Prozess zu regeln.

Literatur

- [1] Van Overschee, P. und De Moor, B.: *Subspace Identification for Linear Systems: Theory - Implementation - Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] Moonen, M. und De Moor, B. und Vandenberghe, L. und Vandewalle, J.: *On- and offline identification of linear state space models*, International Journal of Control, Vol. 49, no. 1, pp. 219-232, 1989.
- [3] Van Overschee, P. und De Moor, B.: *N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems*, Automatica, 30:75-93, 1994.

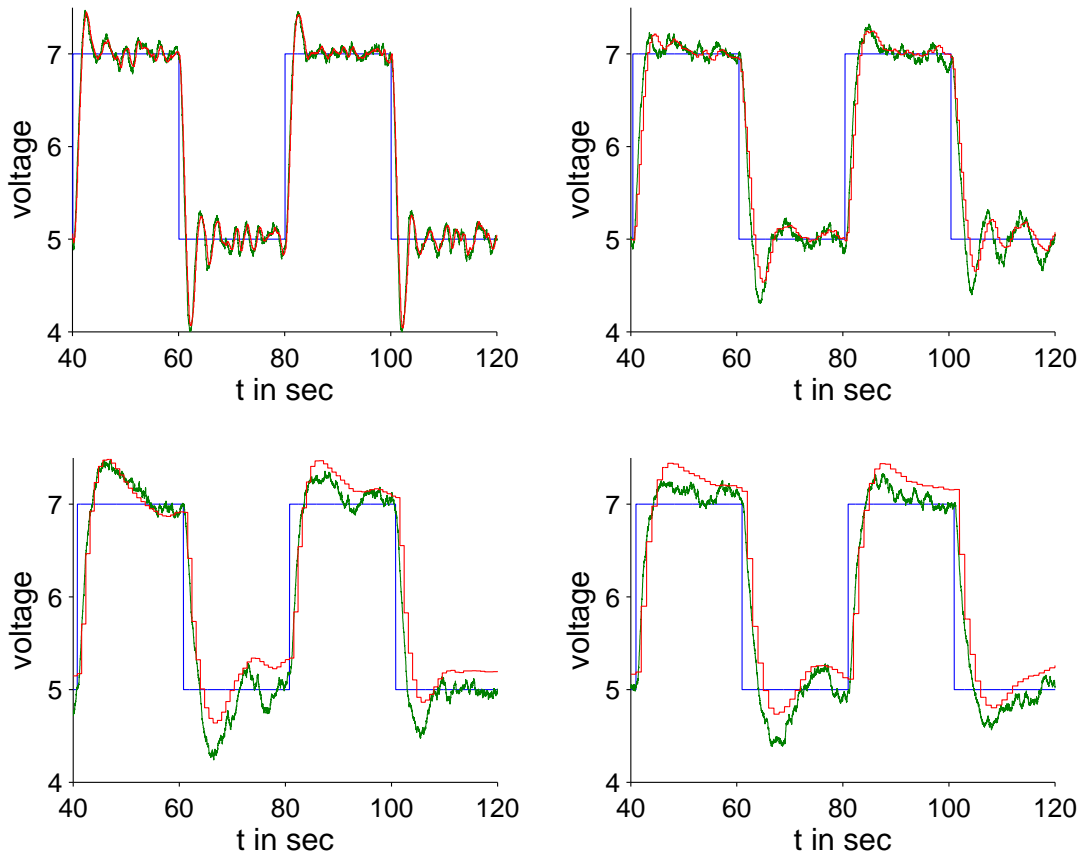


Abbildung 8: Ergebnisse der Regelung mit einem Modell 2. Ordnung und unterschiedlichen Abtastzeiten (0.1s, 0.4s, 0.8s, 1s); Sollwert (blau), Regelgröße (grün), Beobachteraussgang (rot)

- [4] Ljung, L.: *System Identification. Theory for the User. 2nd Edition*, Prentice Hall, 1999.